ΠΡΟΤΑΣΗ: Στους μ.χ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

i) E διαχωρίσιμος

ii) E $2^{ης}$ αριθμησιμότητας

iii) E Lindelöf

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πρέπει να ισχύει το ακόλουθο λήμμα.

ΛΗΜΜΑ Έστω D πυκνό υποσύνολο ενός μχ (E,ρ) και $\mathcal{B}=\{B(x,r) : x\in D,\ r\in\mathbb{Q}\}$. Τότε $\mathcal{B}$ βάση των $\mathcal{T}_\rho$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $A\in\mathcal{T}_\rho$ και y τυχόν εν A. Τότε $(\exists r\in\mathbb{Q}) : B(y,r)\subseteq A$

D πυκνό. Άρα, υπάρχει $d\in D$: $\rho(y,d)<\frac{r}{2}$

Έστω $z\in B(d,\frac{r}{2})$

$\rho(z,y)\leq\rho(z,d)+\rho(d,y)<\frac{r}{2}+\frac{r}{2}=r \Longrightarrow z\in B(y,r)\subseteq A$

Άρα, $y\in B(d,\frac{r}{2})\subseteq A$, $B(d,\frac{r}{2})\in\mathcal{B}$

Συνέχεια απόδειξη πρότασης

i) $\Rightarrow$ ii) : από το Λήμμα

ii) $\Rightarrow$ iii) : Ισχύει στους τοπολογικούς $\Rightarrow$ Ισχύει και στους μετρικούς

iii) $\Rightarrow$ i) : φτιάχνω την κλάση

$\mathcal{B}_\nu=\{B(x,\frac{1}{\nu}) : x\in E\}$ ανοιχτή κάλυψη του E

Άρα, ορίζουμε:

$\{B(x_{\nu 1},\frac{1}{\nu}), B(x_{\nu 2},\frac{1}{\nu}),\dots\}$ ΤΠΑ υποκάλυψη της $\mathcal{B}_\nu$

φτιάχνω περιοχή

$D_\nu=\{x_{\nu 1},x_{\nu 2},\dots\}$ ΤΠΑ ώστε

$D=\bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} D_\nu$ ΤΠΑ

Αρκεί, νδο D πυκνό ($\Leftrightarrow$ ε-πυκνό $\forall\varepsilon>0$)

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $(E_1,\mathcal{T}_1)$, $(E_2,\mathcal{T}_2)$ τ.χ και $f : E_1\xrightarrow{\text{επί}}E_2$ ανοιχτή και συνεχής, τότε αν $(E_1,\mathcal{T}_1)$ είναι e_1 (αντίστοιχα e_2) και ο $(E_2,\mathcal{T}_2)$ θα είναι e_1 (αντίστοιχα e_2)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $(E_1,\mathcal{T}_1)$ είναι e_1 και $y\in E_2$. Τότε, αφού f επί θα $\exists x\in E_1 : y=f(x)$. Θεωρούμε την $\mathcal{B}=\{B_1,B_2,\dots\}$ ΤΠΑ βάση του N_x (εφόσον e_1). Φτιάχνουμε το σύνολο εικόνων $\{f(B_1), f(B_2),\dots\}=G_y$. Επιλέγουμε το $f(B_\nu)$ αλλά όπως το B_ν περιοχή του x τότε το $f(B_\nu)\ni f(x)=y$

Από την άλλη, $\exists A \in \mathcal{T}_1 : x \in A \subseteq B_\nu \Rightarrow f(x) \in \underbrace{f(A)}_{\text{ανοιχτό}} \subseteq f(B_\nu) \Rightarrow$

$\Rightarrow y \in f(A) \subseteq f(B_\nu)$

άρα δ.ο για το y υπάρχει ανοιχτό σύνολο το οποίο μπαίνει στο $f(B_\nu)$.

Θ.δ.ο $\mathcal{G}_y$ βάση του $\mathcal{N}_y$

Έστω $V \in \mathcal{N}_y \xRightarrow[y=f(x)]{f \text{ συνεχ.}} f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_x \xRightarrow[\text{του } \mathcal{N}_x]{\mathcal{B}_x \text{ βάση}} (\exists \nu_0 \in \mathbb{N}) : B_{\nu_0} \subseteq f^{-1}(V) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(B_{\nu_0}) \subseteq f(f^{-1}(V)) \subseteq V \Rightarrow \mathcal{G}_y$ βάση του $\mathcal{N}_y$.

Αντίστοιχα για το $\mathcal{C}_2$:

Έστω $(E_1, \mathcal{T}_1)$ είναι $\mathcal{C}_2$ τότε υπάρχει η συλλογή $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$ τηα βάση της $\mathcal{T}_1$.

Θεωρούμε τη συλλογή:

$\hat{\mathcal{B}} = \{f(B_1), f(B_2), \dots\}$ και όμοια με πριν αποδεικνύουμε ότι η $\hat{\mathcal{B}}$ τηα βάση της $\mathcal{T}_2$.

ΛΗΜΜΑ: $(E_1, \mathcal{T}_1)$ και $(E_2, \mathcal{T}_2)$ τ.χ. και $f : E_1 \xrightarrow{\text{επί}} E_2$ συνεχής D πυκνό εν E_1. Τότε $f(D)$ πυκνό εν E_2

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\overline{D} = E_1 \Rightarrow f(\overline{D}) = f(E_1) = E_2$

Όπως f συνεχής: $f(\overline{D}) \subseteq \overline{f(D)} \Rightarrow E_2 = f(\overline{D}) \subseteq \overline{f(D)} \Rightarrow \overline{f(D)} = E_2$

Προκύπτει η ακόλουθη πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ: Εάν $(E_1, \mathcal{T}_1)$ είναι Σ-χώρος και $(E_2, \mathcal{T}_2)$ τ.χ. αν $f : E_1 \xrightarrow{\text{επί}} E_2$ συνεχής τότε E_2 είναι Σ-χώρος

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας είναι E_1 διαχωρίσιμος (Σ) χώρος και D πυκνό τηα τότε από λήμμα $f(D)$ πυκνό εν E_2 και ακόμη $f(D) \leq D$ άρα και το $f(D)$ είναι τηα.

ΠΡΟΤΑΣΗ Εαν $(E_1, \mathcal{J}_1)$ είναι χώρος Lindelöf και
$f: E_1 \xrightarrow{\text{επι}} E_2$ συνεχής τοτε $(E_2, \mathcal{J}_2)$ είναι χωρος Lindelöf.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Εστω E_1 είναι $\mathcal{L}$-χωρος και
ας είναι $U_a, a \in A$ μία ανοιχτή καλυψη του E_2
δηλ. $E_2 = \bigcup_{a \in A} U_a$ και ΘΔΟ εχει τηα υποκαλυψη

$\Rightarrow f^{-1}(E_2) = f^{-1}(\bigcup_{a \in U} U_a) = \bigcup_{a \in A} f^{-1}(U_a) = E_1$
Επειδή, f συνεχής τοτε $f^{-1}(U_a), a \in A$ ανοιχτή καλυψη E_1
Επειδη E_1 $\mathcal{L}$-χωρος τοτε
$\{f^{-1}(U_{a_1}), f^{-1}(U_{a_2}), \dots\}$ τηα υποκάλυψη της αρχικής
Δηλ. $E_1 = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_{a_i})$, $I \subseteq \mathbb{N}$, I τηe

$E_2 = f(E_1)$ οντας επι
$f(E_1) = f(\bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_{a_i})) = \bigcup_{i \in I} f(f^{-1}(U_{a_i})) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_{a_i}$ τηα υποκαλ.
της καλυψης $U_a, a \in A$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ (ΣΕΛ. 279)
2) E υπεραριθμήσιμο $p \in E$, $\mathcal{J} = \{A \subseteq E : p \notin A\} \cup \{E\}$.
είναι τοπολογία.
e_1: • $x \neq p$. τοτε επιλεγουμε $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ βαση τηα
• $x = p$ εξετάζουμε $V \in \mathcal{N}_p \Rightarrow p \in G \subseteq V$, $G \in \mathcal{J}$.
το μονο στοιχείο είναι το $E \in \mathcal{B}$.
αρα $\mathcal{B} = \{E\}$.
αρα, σε καθε περιπτωση η βάση είναι μονοσύνολο

e_2: ΘΔΟ $(E \setminus \{p\}, \mathcal{J}_{E-\{p\}})$ υποχωρος είναι διακριτή τοπολογία
με E υπεραριθμήσιμο. Αρα δεν είναι e_2.
$A \subseteq E \setminus \{p\}$, $A \in \mathcal{J}$ αρα αφου $A = A \cap E \setminus \{p\}$ τοτε ανοιχτό
αρα διακριτός. Ετσι ο $(E, \mathcal{J})$ όχι e_2

$\mathcal{S}$: Εστω $D \subset E$ πυκνο αρα $\overline{D} = E$
$D \neq E \setminus \{p\}$ και $D \subset E \setminus \{p\} \Rightarrow D \subset \{p\}^c \Rightarrow p \in D^c$
$\exists x : p \neq x$ $x \in D^c$, θεωρούμε το $\{x\}$ και θα πρεπει

$\{x\}\cap D \neq \phi \Rightarrow \underline{x\in D}$ άτοπο

$\underline{\underline{\delta}}$: Έστω ανοιχτή κάλυψη $\mathcal{C}$ του E με $p\in E \Rightarrow p\in \cup\mathcal{C}$ άρα το $\{E\}\in\mathcal{C}$ άρα $\{E\}$ είναι πεπερασμένη υποκάλυψη της $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ τ.π.α υποκάλυψη της $\mathcal{C}$.
Άρα, είναι Lindelöf.

3) Έστω $E \gtrsim \mathbb{N}$ και $\mathcal{J}=\{x\subseteq E : x^c \lesssim \mathbb{N}\}\cup\{\phi\}$
Ό.δ.ο. $(E,\mathcal{J})\notin \mathcal{C}_1$, $(E,\mathcal{J})\in \mathcal{L}$, $(E,\mathcal{J})\in \mathcal{S}$

i. Έστω ότι είναι $\mathcal{C}_1$ (και πάμε σε άτοπο.)
άρα $(\forall p\in E)(\exists \mathcal{B}_p$ του $\mathcal{N}_p$ και μάλιστα τ.π.α$)$
Έτσι, $\mathcal{B}_p=\{B_1,B_2,\dots\}$ τα σύνολα $B_1,B_2,\dots$ θα είναι περιοχές άρα $B_\nu\in\mathcal{N}_p \Rightarrow p\in U_\nu$ και $U_\nu\in\mathcal{J}$ και μάλιστα $U_\nu\subseteq B_\nu$. Έτσι, αφού $U_\nu\subseteq B_\nu \Rightarrow$
$\Rightarrow B_\nu^c\subseteq U_\nu^c \Rightarrow B_\nu^c$ πεπερασμένο (από την $\mathcal{J}$)
Έτσι $\bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} B_\nu^c \lesssim \mathbb{N}$. Ακόμα, $E>\mathbb{N}$ άρα από τα δύο τελευταία $E\setminus\bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} B_\nu^c \gtrsim \mathbb{N} \Rightarrow (\bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} B_\nu^c)^c \gtrsim \mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow \bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} B_\nu \gtrsim \mathbb{N}$ και αφού το $\{p\}$ πεπερασμένο $\Rightarrow$
$\Rightarrow \bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} B_\nu\setminus\{p\} \gtrsim \mathbb{N}$. Συνεπώς μπορούμε να βρούμε στοιχείο $q\neq p : q\in \bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} B_\nu\setminus\{p\}$
όμως $\{p\}\lesssim\mathbb{N} \Rightarrow \{q\}^c\in\mathcal{J}$ $\Big\}$ $\{q\}^c\in\mathcal{N}_p$
και $p\in E \Rightarrow p\in E\setminus\{q\}$
$\exists \nu_0\in\mathbb{N} : B_{\nu_0}\subseteq\{q\}^c$. Άτοπο άρα $E\notin\mathcal{C}_1$ και ούτε $\mathcal{C}_2$

ii) Έστω $\mathcal{C}$ ανοιχτή εν E : $E=\cup\mathcal{C}$. κάλυψη
Έστω $A\in\mathcal{C}\setminus\{\phi,E\}$
$x\in E \Rightarrow x\in A \vee x\in A^c$
• $x\in A^c$ και $E=\cup\mathcal{C} \Rightarrow \exists B\in\mathcal{J} : x\in B$
Έπειτα, επιλέγω $B_x\in\mathcal{J}$ και $x\in B_x$
Οπότε θεωρώντας $\tilde{\mathcal{C}}=\{B_x, x\in A^c\}\cup\{A\}$ ← τ.π.α υποκάλυψη της $\mathcal{C}$. Άρα είναι Lindelöf

iii) Έστω K κλειστό εν E άρα $\underline{K^c \text{ ανοιχτό}}$ οπότε από την $\mathcal{J}$
$K^c=\phi$ ή $(K^c)^c$ πεπερασμένο $\Leftrightarrow K=E$ ή K πεπερασμένο
Έτσι, έστω τώρα $E\gtrsim\mathbb{N}$ αριθμήσιμο $\Rightarrow \exists X\subseteq E : X\simeq\mathbb{N}$

παίρνοντας τη θέση του $\bar{X} \supseteq X \Rightarrow \bar{X} = E$

άρα, βρίκαμε ένα αριθμήσιμο & πυκνό σύνολο

άρα είναι διαχωρίσιμος

3) $\mathcal{T} = \{X \subseteq E : X^c \precsim \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$

Αν $(E,\mathcal{T}) \in \mathcal{S} \Rightarrow (\exists A \subseteq E) ;\ A \precsim \mathbb{N} \wedge \bar{A} = E \} \Rightarrow$

αλλά αν $A \precsim \mathbb{N} \Rightarrow A^c \in \mathcal{T} \Rightarrow A$ κλειστό

$\Rightarrow (A \precsim \mathbb{N}) \wedge (A = \bar{A}) \wedge (\bar{A} = E) \Rightarrow A = E \Rightarrow E \precsim \mathbb{N}$ Άτοπο

άρα $(E,\mathcal{T}) \notin \mathcal{S} \Rightarrow (E,\mathcal{T}) \notin \mathcal{C}_2$

Έστω τυχούσα ανοιχτή κάλυψη $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ με $\cup \mathcal{C} = E$

και $A \in \mathcal{C}$ τότε $A^c \precsim \mathbb{N}$ όποτε

$(\forall x \in A^c)\ A_x : x \in A_x \subseteq \mathcal{C}$

Έστω συλλογή $\mathcal{L} = \{A_x \,/\, x \in A^c\} \cup \{A\} \precsim \mathbb{N}$

Έτσι $A \cup A^c = E$ και $\bigcup_{x \in A} A_x \supseteq A^c$

τότε $\cup \mathcal{A} = E$ και $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$

άρα $(E,\mathcal{T}) \in \mathcal{L}$

Τέλος, δ.δ.ο. δεν είναι $\mathcal{C}_1$

Έστω $p \in E$ και $\beta_p = \{B_n \,|\, n \in I \subseteq \mathbb{N}\}$ μία βάση του $\mathcal{C}_1$

$\Rightarrow (\forall n \in I) \Rightarrow (\exists A \in \mathcal{T})\ p \in A \subseteq B_n$ $\}$ $U_n \subseteq B_n$, $n \in I \Rightarrow$

Ορίζουμε ως $U_n = A$ ώστε $A \subseteq B_n$ $\}$

$\Rightarrow U_n^c \supseteq B_n^c$, $n \in I$ $\}$ $B_n^c \precsim \mathbb{N} \Rightarrow B_n \in \mathcal{T}$, $\forall n \in I$

αλλά $U_n^c \precsim \mathbb{N}$

Άρα, εάν $\Delta = \bigcup_{n \in I} B_n^c \Rightarrow \Delta^c \in \mathcal{T}$

$q \in \Delta^c \setminus \{p\}$ και μάλιστα $\underline{q \in B_n}$, $\forall n \in I$ ← ως εδώ τ.ι. ⊛

Αλλά, $\{q\}^c \in \mathcal{T}$ και ισχύει ότι $p \in \{q\}^c$

Άρα, $\{q\}^c \in \mathcal{N}_p$ όποτε $\exists n_0 \in I$ όπου $B_{n_0} \subseteq \{q\}^c \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{q \notin B_{n_0}}$ Άτοπο ⊛

Άρα, ο $(E,\mathcal{T}) \notin \mathcal{C}_1$